О способе построения динамически сопоставимых композитных индексов

Борзых Д. А., Фурманов К. К., Чернышева И. К.

12 марта 2017 г.

Аннотация

Предлагаемый вниманию доклад основан на результатах статьи [2, Борзых, Фурманов, Чернышева, 2016].

В статье предложен новый способ построения динамических композитных индексов, обладающих двумя важными свойствами:

- **свойством неотрицательности весов**,
- **свойством динамической сопоставимости**.

Апробирование методики проведено на примере построения **композитного индекса здоровья населения**.

Проведено **сопоставление с существующими методами** построения композитных индексов:

- с методом, предложенным в [1, Борзых, 2016],
- с **методом главных компонент (МГК)**,
- с **модифицированным методом главных компонент (ММГК)** (см. [4, Айвазян, 2003]).

Методика построения индексов — 1

Обозначим через $X_{i,t}^{(j)}$ показатель с номером $j \in \{1, \ldots, k\}$, относящийся к объекту $i \in \{1, \ldots, n\}$ в момент времени $t \in \{1, \ldots, T\}$.
Будем предполагать, что для каждого $j \in \{1, \ldots, k\}$ выполнены следующие условия:

1) $\underset{i,t}{\text{med}} X_{i,t}^{(j)} > 0$,

2) $\min\limits_{i,t} X_{i,t}^{(j)} \geq 0$,

3) $\min\limits_{i,t} X_{i,t}^{(j)} < \max\limits_{i,t} X_{i,t}^{(j)}$,

где через $\underset{i,t}{\text{med}} X_{i,t}^{(j)}$ обозначена выборочная медиана массива данных $\{X_{i,t}^{(j)}\}_{i \in \{1,\ldots,n\}}^{t \in \{1,\ldots,T\}}$.

Методика построения индексов — 2

Определим *композитный индекс* $I_{i,t}$, относящийся к объекту i в момент времени t, по формуле:

$$I_{i,t} = w^{(1)} Z_{i,t}^{(1)} + \ldots + w^{(k)} Z_{i,t}^{(k)}, \tag{1}$$

где *веса* $w^{(1)}, \ldots, w^{(k)}$ вычисляются как отношения

$$w^{(j)} = \frac{v^{(j)}}{v^{(1)} + \ldots + v^{(k)}}, \quad j = 1, \ldots, k, \tag{2}$$

а величины $v^{(1)}, \ldots, v^{(k)}$ рассчитываются по формулам

$$v^{(j)} = \frac{\underset{i,\,t}{\operatorname{med}} \left| X_{i,\,t}^{(j)} - \underset{i,\,t}{\operatorname{med}} X_{i,\,t}^{(j)} \right|}{\underset{i,\,t}{\operatorname{med}} X_{i,\,t}^{(j)}}, \quad j = 1, \ldots, k. \tag{3}$$

Методика построения индексов — 3

При этом *нормализованные показатели* $Z_{i,t}^{(1)}, \ldots, Z_{i,t}^{(k)}$, участвующие в формуле (1), определяются следующим образом:

$$Z_{i,t}^{(j)} := \begin{cases} \dfrac{X_{i,\,t}^{(j)} - \min\limits_{i,\,t} X_{i,\,t}^{(j)}}{\max\limits_{i,\,t} X_{i,\,t}^{(j)} - \min\limits_{i,\,t} X_{i,\,t}^{(j)}}, & \text{если (A)}, \\ \dfrac{\max\limits_{i,\,t} X_{i,\,t}^{(j)} - X_{i,\,t}^{(j)}}{\max\limits_{i,\,t} X_{i,\,t}^{(j)} - \min\limits_{i,\,t} X_{i,\,t}^{(j)}}, & \text{если (B)}, \end{cases} \tag{4}$$

(A): чем больше показатель $X^{(j)}$, тем лучше,

(B): чем меньше показатель $X^{(j)}$, тем лучше.

Методика построения индексов — 4

Если композитный индекс I является *многоярусным*, т. е. строится на основе подындексов $I^{(1)}, \ldots, I^{(k)}$, то для его вычисления применяется та же процедура, с тем лишь отличием, что в качестве показателей $X^{(1)}, \ldots, X^{(k)}$ теперь используются подындексы.

Обсуждение методики — 1

Из формул (1) и (3) видно, что ***веса*** $w^{(1)}, \ldots, w^{(k)}$ ***всегда неотрицательны***.

Обсуждение методики — 2

Заметим, что величина

$$\frac{\underset{i,\,t}{\mathrm{med}}\left|X_{i,\,t}^{(j)} - \underset{i,\,t}{\mathrm{med}}X_{i,\,t}^{(j)}\right|}{\underset{i,\,t}{\mathrm{med}}X_{i,\,t}^{(j)}},$$

участвующая в формуле (3), представляет собой робастный (т. е. устойчивый к выбросам) аналог коэффициента вариации, который определяется как отношение стандартного отклонения случайной величины и её математического ожидания $\sqrt{\mathrm{D}(X)}/\mathbb{E}[X]$.

Обсуждение методики — 3

Из формулы (1) и сказанного выше следует, что при построении композитных индексов мы руководствуемся *принципом максимума вариации*: ***чем выше изменчивость показателя, тем бóльшую значимость мы придаем этому показателю в индексе***.

Этот подход основан на следующем соображении: ***если значение некоторого показателя для всех объектов одно и то же, то по этому показателю мы не сможем предпочесть ни один из объектов по отношению к другим***. Аналогичная логика применима и в случае, если рассматриваемый показатель не является константой, но меняется достаточно слабо.

Обсуждение методики — 4

Между нашим подходом и методом главных компонент имеется существенное идейное сходство: ***так же, как и метод главных компонент, наш подход основан на максимизации изменчивости некоторых переменных***. Однако в техническом плане реализации предлагаемого нами способа и метода главных компонент совершенно разные. Отсюда и столь существенные различия в свойствах получаемых композитных индексов:

- ***композитный индекс, построенный при помощи нашего подхода, обладает свойством неотрицательности весов и свойством динамической сопоставимости***,
- ***композитный индекс, построенный при помощи метода главных компонент, не обладает ни свойством неотрицательности весов, ни свойством динамической сопоставимости***.

Обсуждение методики — 5

Определение динамической сопоставимости.

Пусть индекс $I_{i,t}$ относящийся к объекту i в момент времени t вычисляется на основе показателей

$$X^{(1)} = (X^{(1)}_{i,t})^{t=1,\ldots,T}_{i=1,\ldots,n}, \ldots, X^{(k)} = (X^{(k)}_{i,t})^{t=1,\ldots,T}_{i=1,\ldots,n}.$$

Назовем индекс I ***динамически сопоставимым***, если выполнено условие: для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ и любых $s, t \in \{1, \ldots, T\}$:

$$\left(\forall j \in \{1, \ldots, k\}: \;\; \delta^{(j)} \cdot X^{(j)}_{i,s} \leq \delta^{(j)} \cdot X^{(j)}_{i,t}\right) \implies I_{i,s} \leq I_{i,t},$$

где

$$\delta^{(j)} := \begin{cases} 1, & \text{если чем больше показатель } X^{(j)}\text{, тем лучше,} \\ -1, & \text{если чем меньше показатель } X^{(j)}\text{, тем лучше.} \end{cases}$$

Обсуждение методики — 6

Несложно видеть, что в силу монотонности функций

$$f(x) = \frac{x - \min\limits_{i,\,t} X_{i,\,t}^{(j)}}{\max\limits_{i,\,t} X_{i,\,t}^{(j)} - \min\limits_{i,\,t} X_{i,\,t}^{(j)}} \quad \text{и} \quad g(x) = \frac{\max\limits_{i,\,t} X_{i,\,t}^{(j)} - x}{\max\limits_{i,\,t} X_{i,\,t}^{(j)} - \min\limits_{i,\,t} X_{i,\,t}^{(j)}}$$

определяемый формулами (1)–(4) композитный индекс I обладает свойством динамической сопоставимости.

Построение динамически сопоставимого композитного индекса здоровья населения — 1

Ниже приведены результаты апробирования описанной выше методики.

В качестве примера рассмотрена задача построения композитного индекса здоровья населения по региональной статистике РФ за 2005–2013 гг.

Источник данных — статистический бюллетень [3, Регионы России. Социально-экономические показатели. 2013].

Подробности см. [2, Борзых, Фурманов, Чернышева, 2016].

Композитный индекс здоровья населения рассчитывается на основе двух подындексов:

- *индекс заболеваемости*,
- *индекс продолжительности жизни*.

Построение динамически сопоставимого композитного индекса здоровья населения — 2

Индекс заболеваемости рассчитывается на основе 15 показателей:

- некоторые инфекционные и паразитарные болезни,
- новые образования,
- болезни крови, кроветворных органов и отдельные нарушения, вовлекающие иммунный механизм,
- болезни эндокринной системы, расстройства питания и нарушения обмена веществ,
- болезни нервной системы,
- болезни глаза и его придаточного аппарата,
- болезни уха и сосцевидного отростка,
- болезни системы кровообращения,
- болезни органов дыхания,
- болезни органов пищеварения,
- болезни кожи и подкожной клетчатки,

Построение динамически сопоставимого композитного индекса здоровья населения — 3

- болезни костно-мышечной системы и соединительной ткани,
- болезни мочеполовой системы,
- врожденные аномалии (пороки развития), деформации и хромосомные нарушения,
- травмы, отравления и некоторые другие последствия воздействия внешних причин.

Индекс продолжительности жизни рассчитывается на основе 15 показателей:

- ожидаемая продолжительность жизни мужчин,
- ожидаемая продолжительность жизни женщин.

Построение динамически сопоставимого композитного индекса здоровья населения — 4

Веса нормализованных показателей **в индексе уровня заболеваемости населения**:

(6%) некоторые инфекционные и паразитарные болезни,
(5%) новые образования,
(11%) болезни крови, кроветворных органов и отдельные нарушения, вовлекающие иммунный механизм,
(7%) болезни эндокринной системы, расстройства питания и нарушения обмена веществ,
(8%) болезни нервной системы,
(6%) болезни глаза и его придаточного аппарата,
(5%) болезни уха и сосцевидного отростка,
(6%) болезни системы кровообращения,
(4%) болезни органов дыхания,
(8%) болезни органов пищеварения,
(5%) болезни кожи и подкожной клетчатки,

Построение динамически сопоставимого композитного индекса здоровья населения — 5

(6%) болезни костно-мышечной системы и соединительной ткани,

(6%) болезни мочеполовой системы,

(12%) врожденные аномалии (пороки развития), деформации и хромосомные нарушения,

(5%) травмы, отравления и некоторые другие последствия воздействия внешних причин.

Веса нормализованных показателей **в индексе продолжительности жизни населения**:

(62%) ожидаемая продолжительность жизни мужчин,

(38%) ожидаемая продолжительность жизни женщин.

Веса подындексов **в композитном индексе здоровья населения**:

(33%) индекс заболеваемости населения,

(67%) индекс продолжительности жизни.

Построение динамически сопоставимого композитного индекса здоровья населения — 6

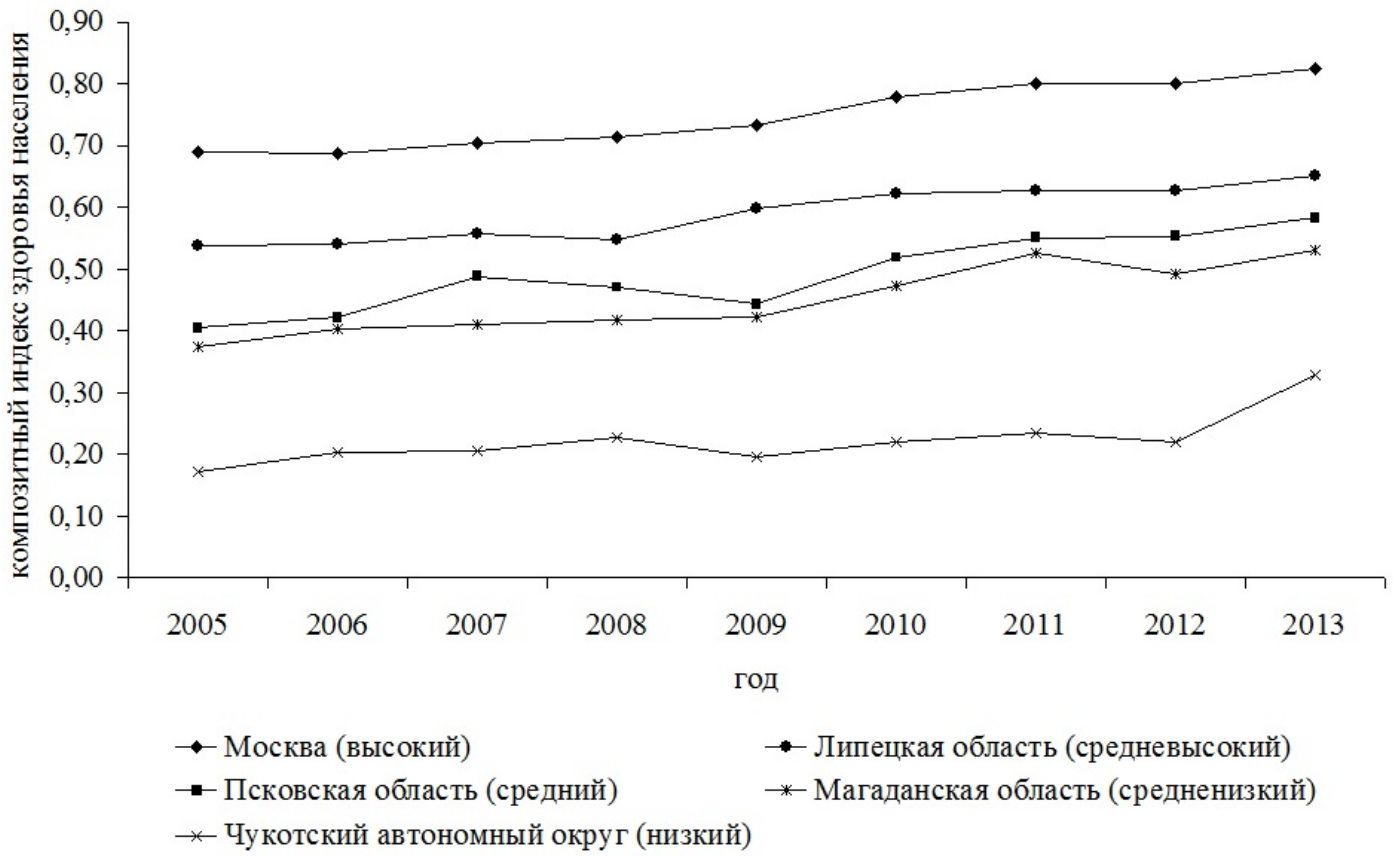

Рис.: Регионы с высоким, средневысоким, средним, средненизким и низким уровнем здоровья населения.

Сопоставление с методом из [1] — 1

Ниже проводится сопоставление «нового» метода расчета композитных индексов из работы [2, Борзых, Фурманов, Чернышева, 2016] и «старого» метода из статьи [1, Борзых, 2016].

Будет показано, что **«старый» способ, в отличие от «нового» не обладает свойством динамической сопоставимости**.

Сопоставление с методом из [1] — 2

В работе [1] композитный индекс $I_{i,t}$, относящийся к объекту i в момент времени t, определялся по формуле:

$$I_{i,t} = w_t^{(1)} Z_{i,t}^{(1)} + \ldots + w_t^{(k)} Z_{i,t}^{(k)}, \tag{5}$$

где веса $w_t^{(1)}, \ldots, w_t^{(k)}$ находились как отношения

$$w_t^{(j)} = \frac{v_t^{(j)}}{v_t^{(1)} + \ldots + v_t^{(k)}}, \quad j = 1, \ldots, k, \tag{6}$$

а величины $v_t^{(1)}, \ldots, v_t^{(k)}$ рассчитываются по формулам

$$v_t^{(j)} = \frac{\underset{i}{\text{med}} \left| X_{i,t}^{(j)} - \underset{i}{\text{med}} X_{i,t}^{(j)} \right|}{\underset{i}{\text{med}} X_{i,t}^{(j)}}, \quad j = 1, \ldots, k. \tag{7}$$

Сопоставление с методом из [1] — 3

При этом нормализованные показатели $Z_{i,t}^{(1)}, \ldots, Z_{i,t}^{(k)}$, участвующие в формуле (5), определялись как

$$Z_{i,t}^{(j)} := \begin{cases} \dfrac{X_{i,\,t}^{(j)} - \min\limits_i X_{i,\,t}^{(j)}}{\max\limits_i X_{i,\,t}^{(j)} - \min\limits_i X_{i,\,t}^{(j)}}, & \text{если (A)}, \\ \dfrac{\max\limits_i X_{i,\,t}^{(j)} - X_{i,\,t}^{(j)}}{\max\limits_i X_{i,\,t}^{(j)} - \min\limits_i X_{i,\,t}^{(j)}}, & \text{если (B)}, \end{cases} \tag{8}$$

(A): чем больше показатель $X^{(j)}$, тем лучше,

(B): чем меньше показатель $X^{(j)}$, тем лучше.

Сопоставление с методом из [1] — 4

Сравнивая формулы (4) и (8), видим, что оптимизация в формуле (4) производится как по i, так и по t, в то время как в формуле (8) — только по i (при фиксированном значении t). Такая модификация позволяет сделать **сопоставимыми** значения нормализованных показателей в разные моменты времени.

Теперь обратимся к формулам (3) и (7). Как видно, в формуле (3) медиана находится по всему массиву данных $\{X^j_{i,t}\}^{t=1,\ldots,T}_{i=1,\ldots,n}$, в то время как в формуле (7) она находится по массиву $\{X^j_{i,t}\}_{i=1,\ldots,n}$ (при каждом отдельном значении t). В результате, при «новом» способе расчета весов $w^{(1)},\ldots,w^{(k)}$ с помощью формул (2) и (3) веса $w^{(1)},\ldots,w^{(k)}$ перестают быть переменными во времени. По-видимому, отказ от концепции переменных весов является той необходимой «платой», чтобы получить свойство динамической сопоставимости.

Сопоставление с методом из [1] — 5

С целью сопоставления «старого» и «нового» способов расчета композитных индексов рассмотрим следующий

Искусственный пример 1.

Будем строить композитный индекс продолжительности жизни I на основе двух показателей: ожидаемой продолжительности жизни мужчин (показатель $X^{(1)}$) и ожидаемой продолжительности жизни женщин (показатель $X^{(2)}$).

Сопоставление с методом из [1] — 6

Искусственный пример 1 (продолжение).

Предположим, что в 2005 г. ожидаемая продолжительность жизни как мужчин, так и женщин в нашем гипотетическом примере совпадает с той реальной ожидаемой продолжительностью жизни, которая была в регионах РФ в 2005 г. В рамках нашего примера предположим также, что в последующие годы с 2006 по 2013 г. ожидаемая продолжительность жизни мужчин с каждым годом росла на один год, а ожидаемая продолжительность жизни женщин за тот же период не менялась, оставаясь на уровне 2005 г. Таким образом, мы имеем следующую динамику показателей $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$:

$$\begin{cases} X^{(1)}_{i,t} = X^{(1)}_{i,2005} + (t - 2005), \\ X^{(2)}_{i,t} = X^{(2)}_{i,2005}, \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, 79, \quad t = 2006, \ldots, 2013.$$

Сопоставление с методом из [1] — 7

Искусственный пример 1 (продолжение).

Используя в качестве данных искусственно созданные показатели $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$, мы рассчитали композитный индекс продолжительности жизни «старым» и «новым» способами.

В результате, для каждого из регионов композитный индекс продолжительности жизни, рассчитанный «новым» способом, является строго возрастающей функцией по переменной t.

Что касается «старого» способа расчета, то, например, для Чукотского автономного округа имеет место хотя и незначительное, но строгое снижение композитного индекса продолжительности жизни (см. рис. ниже).

Сопоставление с методом из [1] — 8

Искусственный пример 1 (продолжение).

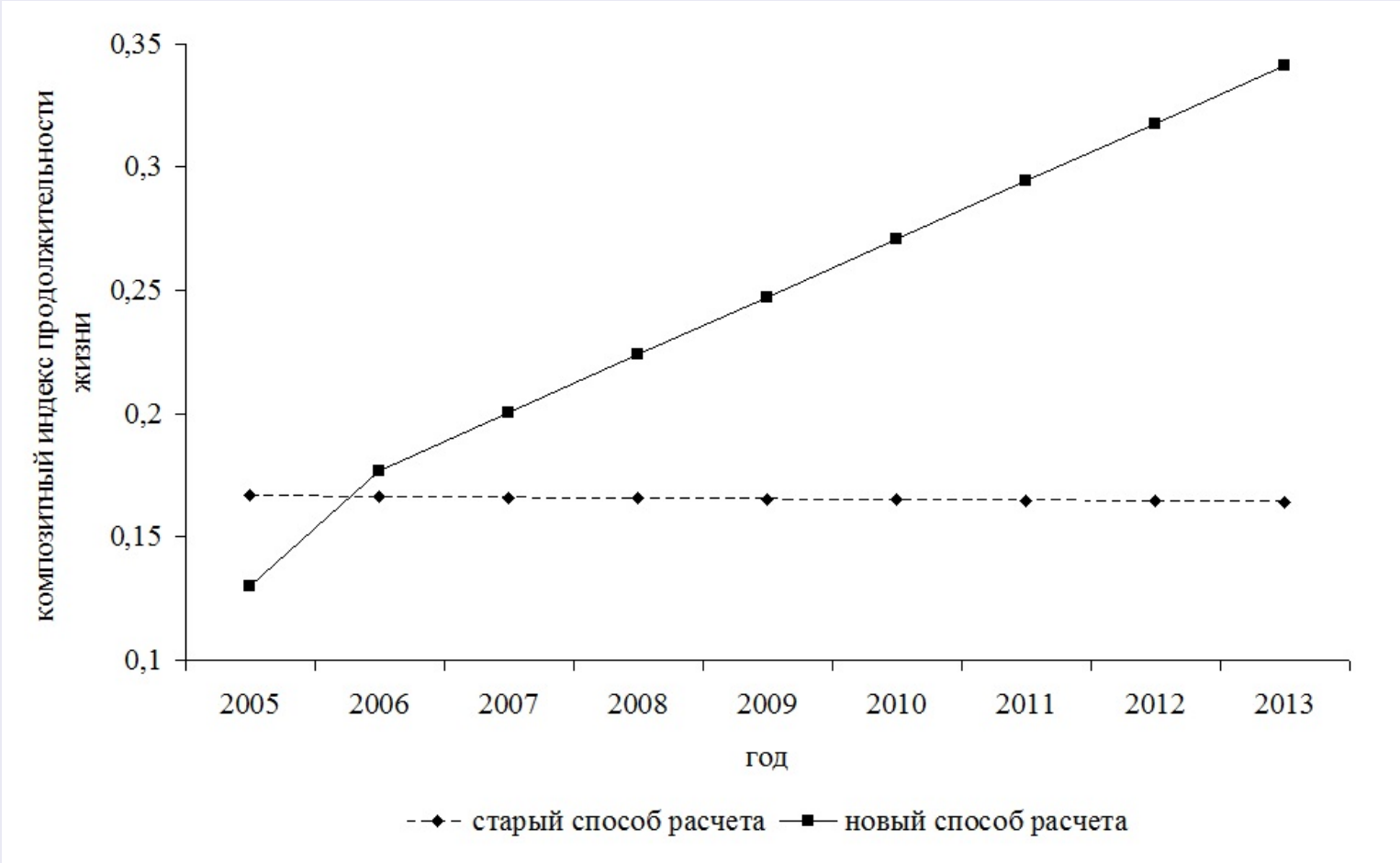

Рис.: Гипотетическая динамика композитного индекса продолжительности жизни для Чукотского автономного округа.

Сопоставление с методом из [1] — 9

Искусственный пример 1 (продолжение).

Мы получили, что для Чукотского автономного округа, имеют место неравенства $X^1_{i,2005} \leq X^1_{i,2013}$ и $X^2_{i,2005} \leq X^2_{i,2013}$, но при этом для «старого» способа расчета индексов $I_{i,2005} > I_{i,2013}$. Стало быть, **«старый» способ** расчета композитных индексов **не обладает свойством динамической сопоставимости**.

Сопоставление с МГК — 1

Первой главной компонентой показателей $Z^{(1)}, \ldots, Z^{(k)}$ называется их линейная комбинация

$$I_{\text{МГК}} = v^{(1)} Z^{(1)} + \ldots + v^{(k)} Z^{(k)} \tag{9}$$

с наибольшей дисперсией, коэффициенты в которой определяются как решение следующей экстремальной задачи

$$\begin{cases} \mathrm{D}\left(v^{(1)} Z^{(1)} + \ldots + v^{(k)} Z^{(k)}\right) \to \max\limits_{v^{(1)}, \ldots, v^{(k)} \in \mathbb{R}}, \\ (v^{(1)})^2 + \ldots + (v^{(k)})^2 = 1. \end{cases} \tag{10}$$

Показатели $Z^{(1)}, \ldots, Z^{(k)}$ в формулах (9) и (10) предполагаются уже нормализованными.

Сопоставление с МГК — 2

Два распространённых способа нормировки:

- «стандартизация» — вычитание среднего и деление на стандартное отклонение (по умолчанию используется в статистических пакетах),
- сведение к единой шкале с заданными наибольшим и наименьшим значением (методология см. [4, Айвазян, 2003]).

Далее первый способ будем называть «МГК с корреляционной матрицей», а второй — «МГК с ковариационной матрицей».

Сопоставление с МГК — 3

- МГК с корреляционной матрицей вообще не учитывает разброс показателей — веса определяются только корреляциями.
- МГК с ковариационной матрицей измеряет разброс как концентрацию распределения у крайних значений (см. рис. ниже).

Сопоставление с МГК — 4

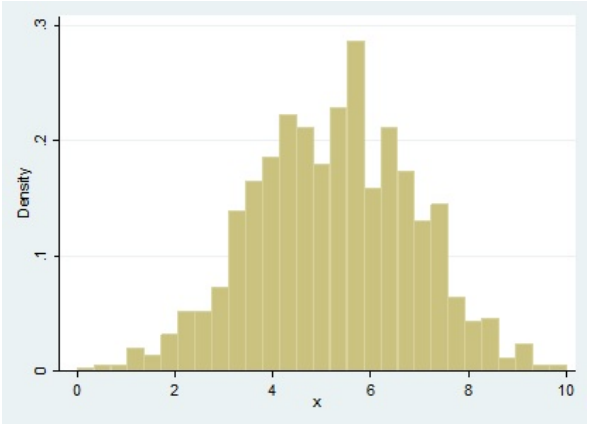

Рис.: Низкий разброс.

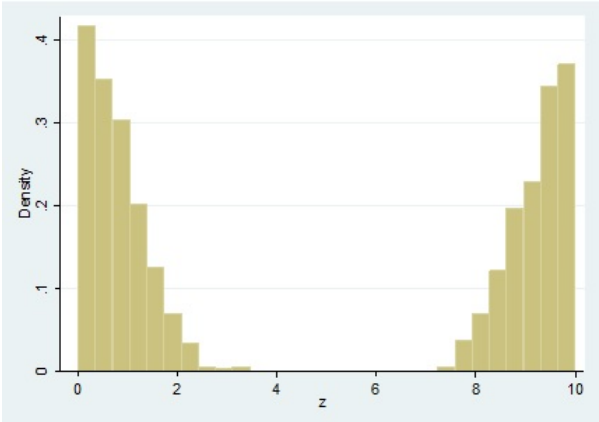

Рис.: Высокий разброс.

Сопоставление с МГК — 5

Искусственный пример 2.

Рассмотрим динамику двух показателей $Z^{(1)}$ и $Z^{(2)}$ за семь лет:

t	$Z^{(1)}$	$Z^{(2)}$
1	1	0
2	0.71	0.16
3	0.42	0.33
4	0.14	0.49
5	0.69	0.8
6	0.28	0.83
7	0	1

Сопоставление с МГК — 6

Искусственный пример 2 (продолжение).

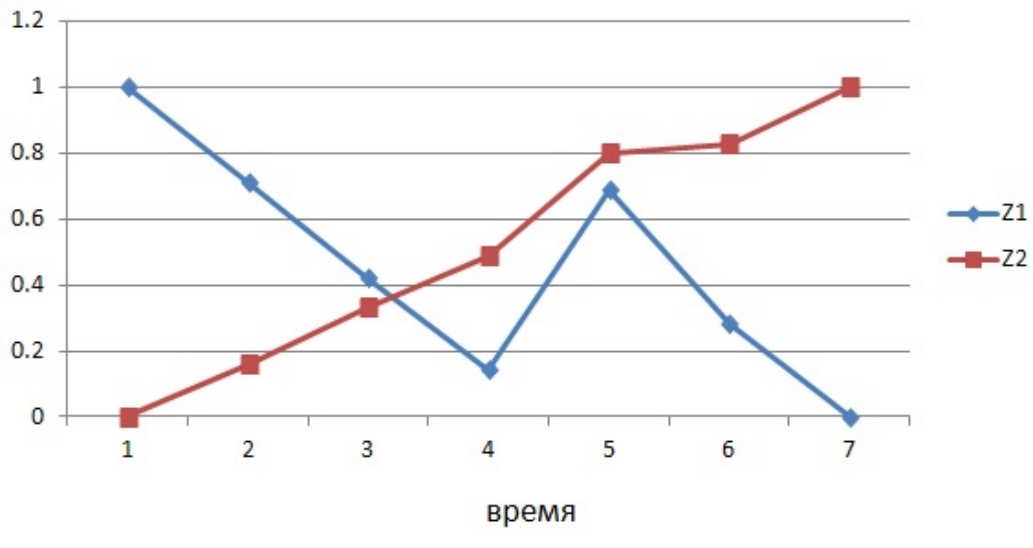

Рис.: Динамика показателей $Z^{(1)}$ и $Z^{(2)}$.

Первая главная компонента:

$$I_{\text{МГК, cov}} = -0.68Z^{(1)} + 0.73Z^{(2)},$$
$$I_{\text{МГК, corr}} = -0.71Z^{(1)} + 0.71Z^{(2)}.$$

Сопоставление с МГК — 7

Искусственный пример 2 (продолжение).

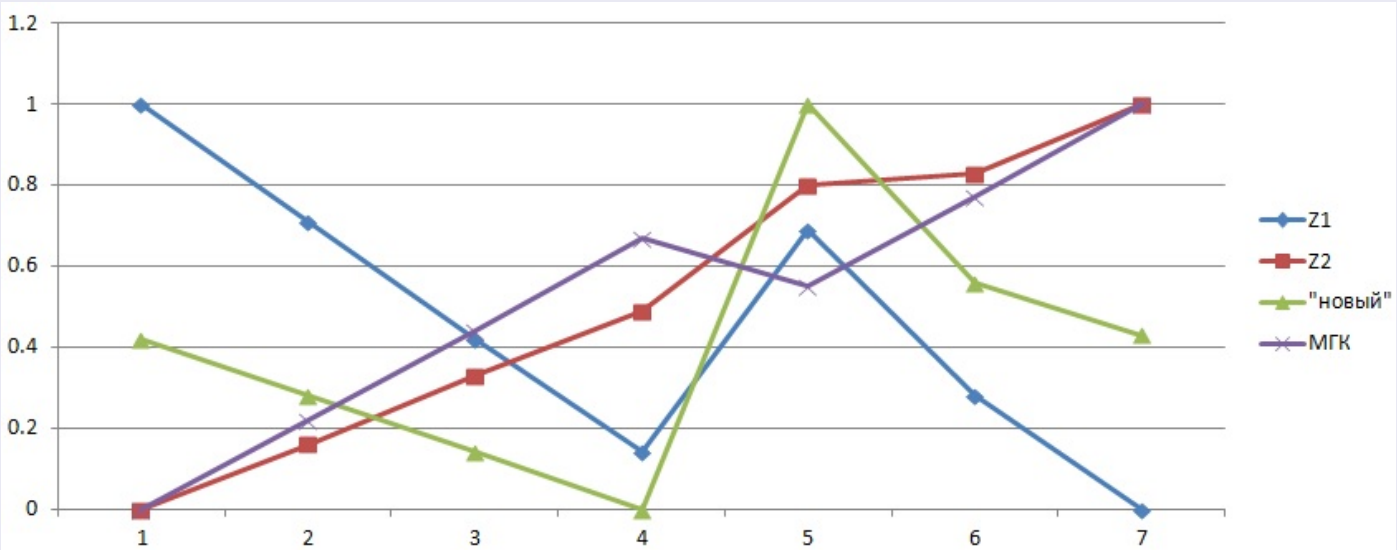

Рис.: Динамика индексов в искусственном примере 2.

Нелогичность поведения МГК: на промежутке $t \in [4; 5]$ оба показателя $Z^{(1)}$ и $Z^{(2)}$ растут, а индекс МГК — **падает**!

Причина: отрицательная корреляция между показателями $Z^{(1)}$ и $Z^{(2)}$.

Сопоставление с модифицированным МГК — 1

Возможное решение проблемы отрицательных весов и динамической несопоставимости — возвести веса МГК в квадрат [4, Айвазян, 2003].

Индекс $I_{\text{ММГК}}$ модифицированного метода главных компонент (ММГК) определяется следующим образом.

Сначала рассчитывают коэффициенты $v^{(1)}, \ldots, v^{(k)}$ тем же способом, что и при МГК:

$$\begin{cases} \mathrm{D}\left(v^{(1)}Z^{(1)} + \ldots + v^{(k)}Z^{(k)}\right) \to \max\limits_{v^{(1)},\ldots,v^{(k)}\in\mathbb{R}}, \\ (v^{(1)})^2 + \ldots + (v^{(k)})^2 = 1. \end{cases}$$

а потом по определению полагают

$$I_{\text{ММГК}} := (v^{(1)})^2 Z^{(1)} + \ldots + (v^{(k)})^2 Z^{(k)}.$$

Обращаем внимание на то, что ММГК веса не могут быть отрицательными, но **могут быть нулевыми**.

Сопоставление с модифицированным МГК — 2

Пусть признаки $Z^{(1)}$ и $Z^{(2)}$ независимы, причем $\mathrm{D}(Z^{(2)}) > \mathrm{D}(Z^{(1)})$.

Индекс, построенный МГК и ММГК с ковариационной матрицей:

$$I_{\text{МГК, cov}} = I_{\text{ММГК, cov}} = Z^{(2)}.$$

Индекс, построенный ММГК с корреляционной матрицей:

$$I_{\text{ММГК, corr}} = 0.5Z^{(1)} + 0.5Z^{(2)}.$$

Вывод: при применении ММГК с **ковариационной** матрицей индекс **не учитывает** показатель с меньшей дисперсией.

Несложно придумать схожий пример и для ММГК с корреляционной матрицей.

Сопоставление с модифицированным МГК — 3

Пусть признаки $Z^{(1)}$, $Z^{(2)}$ и $Z^{(3)}$ имеют корреляционную матрицу:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.4 & -0.4 \\ 0.4 & 1 & 0.7 \\ -0.4 & 0.7 & 1 \end{pmatrix}$$

Тогда первая модифицированная главная компонента равна:

$$I_{\text{ММГК, corr}} = 0.5Z^{(2)} + 0.5Z^{(3)}.$$

Обратим внимание, что первый признак $Z^{(1)}$ не входит в данную компоненту.

Причина: $\operatorname{corr}(Z^{(1)}, Z^{(2)}) = -\operatorname{corr}(Z^{(1)}, Z^{(3)})$.

Этот пример может показаться слишком экзотическим, но можно придумать и более естественный случай.

Сопоставление с модифицированным МГК — 4

Пусть признаки $Z^{(1)}$, $Z^{(2)}$ и $Z^{(3)}$ имеют корреляционную матрицу:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.7 \\ 0 & 0.7 & 1 \end{pmatrix}$$

Тогда первая модифицированная главная компонента все равно равна:

$$I_{\text{ММГК, corr}} = 0.5Z^{(2)} + 0.5Z^{(3)}.$$

Вывод: МГК и ММГК с корреляционной матрицей придают **нулевой** вес **признаку, некоррелированному с остальными признаками**.

Выводы — 1

МГК с корреляционной матрицей:

- не учитывает разброс показателей,
- учитывает корреляции,
- не гарантирует неотрицательность весов и динамическую сопоставимость,
- может придавать нулевой вес показателю, несмотря на его вариабельность.

МГК с ковариационной матрицей:

- учитывает разброс как сосредоточенность у крайних значений,
- учитывает корреляции,
- не гарантирует неотрицательность весов и динамическую сопоставимость,
- может придавать нулевой вес показателю, несмотря на его вариабельность.

Выводы — 2

ММГК с корреляционной матрицей:

- не учитывает разброс показателей,
- учитывает корреляции,
- гарантирует неотрицательность весов и динамическую сопоставимость,
- может придавать нулевой вес показателю, несмотря на его вариабельность.

ММГК с ковариационной матрицей:

- учитывает разброс как сосредоточенность у крайних значений,
- учитывает корреляции,
- гарантирует неотрицательность весов и динамическую сопоставимость,
- может придавать нулевой вес показателю, несмотря на его вариабельность.

Выводы — 3

«Новый» способ:

- учитывает разброс показателей,
- не учитывает корреляции,
- гарантирует неотрицательность весов и динамическую сопоставимость,
- придаёт положительный вес изменчивым показателям.

Возникают вопросы:

- нужно ли учитывать корреляции?
- нужно ли учитывать разброс?

Спасибо за внимание!

Список литературы

- Борзых Д. А. Количественный анализ динамики уровня здоровья населения РФ // Вестник НГУЭУ. 2016. № 1. С. 133-143.
- Борзых Д. А., Фурманов К. К., Чернышева И. К. О способе построения динамически сопоставимых композитных индексов // Вестник НГУЭУ. 2016. № 4. С. 67-83.
- Регионы России. Социально-экономические показатели. 2013 : стат. сб. / Росстат. – М., 2013.
- Айвазян С. А. К методологии измерения синтетических категорий качества жизни населения // Экономика и математические методы. Т. 39. №2. 2003, а.