НОВЫЙ СПОСОБ ОБНАРУЖЕНИЯ СТРУКТУРНЫХ СДВИГОВ В GARCH-МОДЕЛЯХ

Борзых Дмитрий Александрович,
e-mail: borzykh.dmitriy@gmail.com
Хасыков Михаил Арлтанович,
e-mail: mkhasykov@gmail.com
Языков Артем Анатольевич
e-mail: ayazikov@hse.ru
Москва, НИУ ВШЭ

Для получения более точных оценок коэффициентов эконометрических моделей требуется большее количество наблюдений. Однако при расширении выборки исследователи сталкиваются с проблемой, называемой *структурными сдвигами* или *разладками* случайного процесса.

В работе рассматривается проблема обнаружения структурных сдвигов в рамках семейства кусочно-заданных GARCH-моделей (см. [1–6]). Конкретнее, пусть k — неизвестное число структурных сдвигов временного ряда длины T. Пусть $\tau_1,\ldots,\tau_k$ — моменты структурных сдвигов между j-м и $(j+1)$-м сегментами временного ряда. Тогда j-й фрагмент временного ряда описывается как

$$\begin{cases} Y_t = \varepsilon_t, \\ \varepsilon_t = \sigma_t \cdot \xi_t, \\ \sigma_t^2 = \omega_j + \delta_j \cdot \sigma_{t-1}^2 + \gamma_j \cdot \varepsilon_{t-1}^2, \end{cases}$$

где $\omega_j, \delta_j, \gamma_j$ – неизвестные параметры модели, $\tau_0 := 1$, $\tau_{k+1} := T+1$, $\tau_{j-1} \le t \le \tau_j - 1$, $j = 1,\ldots,k+1$, $(\xi_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ — последовательность независимых нормальных стандартных случайных величин.

При допущении наличия структурного сдвига в момент τ, логарифмическая функция правдоподобия имеет вид:

$$l(\theta_1,\theta_2) = -\frac{1}{2}\sum_{t=\tau-h}^{t=\tau-1}\left(\ln 2\pi + \ln\sigma_t^2(\theta_1) + \frac{\varepsilon_t^2(\theta_1)}{\sigma_t^2(\theta_1)}\right) - \frac{1}{2}\sum_{t=\tau}^{t=\tau+h}\left(\ln 2\pi + \ln\sigma_t^2(\theta_2) + \frac{\varepsilon_t^2(\theta_2)}{\sigma_t^2(\theta_2)}\right),$$

где $\theta_j = (\omega_j, \delta_j, \gamma_j) \in \Theta$, $j = 1,2,$ а Θ — множество допустимых значений параметров, $\Theta = \{(\omega,\delta,\gamma) : \omega > 0, \delta \ge 0, \gamma \ge 0, \delta + \gamma < 1\}$.

Введем *скользящую статистику отношения правдоподобия:*

$$LR_\tau = -2\left(\max_{\theta_1,\theta_2\in\Theta,\theta_1=\theta_2} l(\theta_1,\theta_2) - \max_{\theta_1,\theta_2\in\Theta} l(\theta_1,\theta_2)\right), \quad \tau \in [h+1, T-h].$$

Для указанной статистики найдены нижняя $\underline{q}_{LR}$ и верхняя $\overline{q}_{LR}$ 99%-границы. Алгоритм поиска структурных сдвигов описывается следующим образом: пусть в некоторой точке τ^* функция LR_τ имеет локальный максимум. Если $LR_{\tau^*} > \overline{q}_{LR}$, мы считаем, что в точке τ^* есть структурный сдвиг; если $LR_{\tau^*} < \underline{q}_{LR}$, то в точке τ^* структурного сдвига нет; если же $\underline{q}_{LR} \le LR_{\tau^*} \le \overline{q}_{LR}$, то значение LR_{τ^*} попало в зону неопределенности и в этом случае нельзя сделать окончательного вывода о наличии структурного сдвига.

Свойства предлагаемого метода были протестированы на симулированных данных. В первом эксперименте было сгенерировано 10000 рядов длиной 2000 наблюдений с двумя структурными сдвигами в точках $\tau_1 = 501$ и $\tau_2 = 1501$. Образовавшиеся сегменты ряда описываются GARCH-моделью со следующими коэффициентами:

$$\omega_1 = 0{,}0001, \quad \delta_1 = 0.98, \quad \gamma_1 = 0,$$
$$\omega_2 = 0{,}0006, \quad \delta_2 = 0.98, \quad \gamma_2 = 0,$$
$$\omega_3 = 0{,}0001, \quad \delta_3 = 0.98, \quad \gamma_3 = 0.$$

В рамках проведенных испытаний было получено, что данный метод обнаружил правильное число структурных сдвигов примерно в 88% случаев. При этом в случае верного обнаружения числа структурных сдвигов сами моменты структурных сдвигов устанавливаются достаточно точно:

Таблица 1.

	$\hat{\tau}_1$	$\hat{\tau}_2$
MEAN	503,79	1492,50
MAE	8,57	11,85

Во втором численном эксперименте анализировались 10000 рядов длиной 2000 наблюдений, не содержащие структурных сдвигов с параметрами $\omega = 0.0001$, $\delta = 0.98$, $\gamma = 0$. В данном случае метод правильно указал на отсутствие структурных сдвигов в 97,47% случаев. Полученные результаты говорят о том, что предлагаемый метод ошибочно обнаруживает структурные сдвиги достаточно редко.

Таким образом, результаты проведенных численных экспериментов позволяют судить о достаточно хороших свойствах рассматриваемого в работе метода.

1. Lee S., Kim S., Cho S. On the CUSUM test for parameter changes in GARCH(1,1) Models. Communications in Statistics – Theory and Methods. – 2000. – № 29(2). – P. 445–462.
2. Lee S., Tokutsu Y., Maekawa K. The CUSUM test for parameter change in regression models with ARCH errors. Journal of the Japanese Statistical Society. – 2004. – № 34. – P. 173–188
3. Kokoszka P., Leipus R. Change-point estimation in ARCH models. Bernoulli. – 2000. – № 6(3). – P. 513–539.

4. Davis R., Lee T., Rodriguez-Yam G. Break detection for a class of nonlinear time series models. Journal of Time Series Analysis. – 2008. – № 29(5). – P. 834–867.
5. Ross G. J. Modeling Financial Volatility in the Presence of Abrupt Changes. Physica A. Statistical Mechanics and its Applications. – 2013. – № 192(2). – P. 350–360.